1.1 集合

2023年9月19日 星期二 09:21

De Morgan 律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$

小说明：$x\in\overline{A\cup B}$

$\Leftrightarrow x\notin A\cup B$

$\Leftrightarrow x\notin A$ 且 $x\notin B$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A}$ 且 $x\in\overline{B}$

$\Leftrightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}$

定义：我们称一个集合 S 是可列的，若它与 $\mathbb{Z}^+$ 之间存在一个双射，即 S 中的元素可以排列成一列

定义：如果集合 S 有 n 个元素组成，其中 n 为非负整数则称 S 为有限集.

定义：设 A 与 B 是给定的集合

$\forall x\in A, y\in B$，可定义一个有序对 (x,y)

规定 $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$ 当且仅当 $x_1=x_2, y_1=y_2$.

定义 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$ 为 A 与 B 的笛卡尔乘积（直积）

例 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

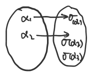
1.2 映射与函数

2023年9月19日 星期二 12:01

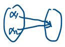
恒等映射：集 X 中每个元素都映射到自身的映射 I

$\alpha\in X \quad I(\alpha)=\alpha$.

单射：

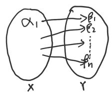


单射不存在



对 $\forall \alpha_1,\alpha_2$，若 $\alpha_1\neq\alpha_2$ 时 $\sigma(\alpha_1)\neq\sigma(\alpha_2)$

满射



满射要求值域中所有元素都有其原像.

对 $\forall\beta\in Y$，均有 $\alpha\in X$ 使 $\sigma(\alpha)=\beta$.

双射

一一映射

既是单射，又是满射 即为 一一映射.

比较无限集元素关系：从双射角度考虑

逆映射

$f: X\to Y$

称 X 为 f 的定义域，记作 D_f

称 $\{f(x)\mid x\in X\}$，为 f 的值域，记为 R_f

定义：设 $f: X\to Y$ 为一个单射.

则 $\forall y\in R_f$，$\exists!\, x\in X$，使 $f(x)=y$

定义了从 R_f 到 X 的一个映射

$R_f\to X$
$y\mapsto x$ 称为 f 的逆映射

复合映射

定义：设 $g: X\to U_1$，$f: U_2\to Y$ 是两个给定的映射.

若 $R_g\subset D_f$，则可定义如下映射

$X\longrightarrow Y \quad x\longrightarrow f(g(x))$

称它为 f 与 g 的复合映射，记作 $f\circ g$

$(f\circ g)(x)=f(g(x)) \quad x\in D_g$.

一元实函数

定义：设 $f: X\to Y$ 是一个映射，

若 X 与 Y 都是 R 的子集，则称 f 是一元实函数

通常取 $Y\in R$，所以常用 $y=f(x)$，$x\in X$ 表示一个函数

基本 初等函数

常～幂～指数～对数～三角～反三角～

有限次四则运算、复合

初等函数

研究 a^b 中，b 为有理或无理的情况.

性质：$\forall a\in R^+$ 及 $\forall n\in Z^+$，$\exists!\in R^+$ 使 $y^n=a$

分析：令 $E=\{t\in R^+ : t^n<a\}$

证 E 非空有上界，从而有上确界

当 a^b 中 b 为无理数时，定义 上下界必定存在

$$a^b=\begin{cases}\sup\{a^r: r\in\mathbb{Q} \text{ 且 } r<b\}, & a>1\text{ 时}\\ 1 & a=1\text{ 时}\\ \inf\{a^r: r\in\mathbb{Q}\text{ 且 } r>b\}, & a<1\text{ 时}\end{cases}$$

→ 也可记作 $\frac{1}{(\frac{1}{a})^b}$

函数的表示

- 分段表示
- 隐式表示 例：由 $x^2+y^2=1$ 及 $y\geq 0$ 确定的 y 关于 x 的函数 $y=\sqrt{1-x^2}$
- 参数表示 $\begin{cases} y=\sin t\\ x=\cos t\end{cases}$ $t\in(0,\pi)$

函数的性质

1. 单调性
2. 周期性（可以不存在最小正周期）

   例：常值函数、Dirichlet 函数
3. 有界性

   定义：设 f 是定义在 D 上的一个函数

   若 $\exists M\in R$（$m\in R$），使 $\forall x\in D$，均有 $f(x)\leq M$（$f(x)\geq m$）

   则称 f 是一个有上（下）界的函数，并称 M（m）是 f 在 D 上的一个上（下）界

   若 f 在 D 上既有上界又有下界，则称 f 是 D 上的有界函数.

$\Updownarrow$

$\exists m, M\in R$ 使 $\forall x\in D$ 有 $m\leq f(x)\leq M$

$\Updownarrow$

$\exists G\geq 0$ 使 $\forall x\in D$ 有 $|f(x)|\leq G$

f 在 D 上有上界 $\Longleftrightarrow \{f(x): x\in D\}$ 有上界

此时，由确界存在定理 $\{f(x): x\in D\}$ 有上确界

记 $\sup\limits_{x\in D} f(x)=\sup\{f(x): x\in D\}$.

同理 $\inf\limits_{x\in D} f(x)=\inf\{f(x): x\in D\}$.

性质：若 f 与 g 均为有界函数，必有

$$\sup_{x\in D}(f(x)+g(x))\leq\sup_{x\in D}(f(x))+\sup_{x\in D}(g(x))$$

$$\inf_{x\in D}(f(x)+g(x))\geq\inf_{x\in D}(f(x))+\inf_{x\in D}(g(x)),$$

性质2

$$\inf_{x\in D}(f(x)+g(x))\leq\underbrace{\inf_{x\in D}(f(x))}_{\alpha}+\underbrace{\sup_{x\in D}(g(x))}_{\beta}$$

☆ **命题**：设 A, B 是给定实数.

若 $\forall\varepsilon>0$，均有 $A<B+\varepsilon$

则 $A\leq B$

证：对 $\forall\varepsilon>0$，由下确界的定义

$\exists x_0\in D$，使 $f(x_0)<\alpha+\varepsilon$

从而 $LHS\leq f(x_0)+g(x_0)<\alpha+\varepsilon+\beta$

则 $LHS\leq\alpha+\beta$

两个不等式

不等式1：对于 $\forall$ n 个 R^+ $a_1, a_2\cdots a_n$ 有

$$\frac{a_1+\cdots a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

不等式2：$(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha \quad (n\geq 1,\ \alpha\geq -1)$